Pád na lane

RNDr. Ján ŠIMON, PhD.

Pád pri lezení býva málokedy príjemný a vnáša do hry sériu rizík. Tými sú napríklad nebezpečie zlyhania istiacich bodov, pretrhnutie lana, zlomenie karabín pri nevhodnom namáhaní atď... Tento článok pojednáva práve o riziku pretrhnutia lana – kľúčového ohnivka v reťazci istiacich pomôcok a o pojme „pádový faktor“, ktorý napriek svojej dôležitosti pozná len relatívne malá časť lezúcej verejnosti.

Úvod:

Ak dôjde k strate kontaktu so skalou a lezec začne padať k zemi, naberá každou sekundou pádovú energiu. Táto energia sa musí akýmsi spôsobom **úplne** absorbovať, lebo iba v tom prípade sa pád zastaví. Absorpcia dopadom na zem je pre človeka deštruktívna, preto musí byť energia pohltená lanom a istiacimi prvkami.

Energetická bilancia pádu na lane

Prírastok energie je vo všeobecnosti definovaný ako práca, ktorú koná pôsobiaca silou na určitej dráhe. To isté sa rečou matematiky povie nasledovne:

$$E(\vec{r}) = E(\vec{r}_0) + \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}(\vec{\xi}) . d\vec{\xi} \;, \tag{1}$$

kde $\vec{r}_0$ a $\vec{r}$ sú počiatočný a konečný polohový vektor, $\vec{F}(\vec{\xi})$ je sila, ktorú prekonávame na dráhovom elemente $d\vec{\xi}$.

Potenciálna energia

V procese padania dochádza k transformovaniu potenciálnej energie na kinetickú a prvá spomenutá bude pre nás základným elementom ďalších úvah. Predpokladajúc ideálne symetrie gravitačného poľa a bežné vzdialenosti od povrchu Zeme môžeme konštatovať, že v gravitačnom poli Zeme pôsobí na každé teleso o hmotnosti **m** sila:

$$\vec{F}_g = -mg\vec{\gamma} \;, \tag{2}$$

kde $g \cong 9{,}81 m.s^{-2}$ je tiažové zrýchlenie a $\vec{\gamma}$ je jednotkový vektor ukazujúci zo stredu Zeme na daný bod priestoru. Prechod od sily k energii budeme vždy realizovať definičným vzťahom (1), pričom za silu dosadíme príslušnú silu so záporným znamienkom, v tomto prípade $\vec{F}_g = mg\vec{\gamma}$. Po niekoľkých jednoduchých operáciách dostávame

$$\Delta E_g = \int_{z_0}^{z} mg\left|d\vec{\xi}\right| = mg(z - z_0) \,. \tag{3}$$

Absorbcia lanom

Lano sa dá prirovnať k pružine, do ktorej sa energia ukladá natiahnutím. Na otázku či sa pri tom nedopúšťame chyby je kladná odpoveď, nakoľko takéto prirovnanie je skutočne dokonalé len pri veľmi malých predĺženiach lana. Avšak nepresnosť je malá a tak výsledok, ktorý dostaneme bude mať prijateľnú presnosť. Ak by sme chceli byť detailne presní, museli by sme okrem korektného vyjadrenia sily vyvíjanej lanom (ktorá môže byť vo všeobecnosti dosť komplikovanou funkciou) tiež zohľadniť energiu, ktorá sa premieňa na trvalé deformačné zmeny a zmeny v štruktúre lana. Síce by sme tým vycibrili náš matematický model problému, ale fyzikálnu podstatu veci by to pre svoju komplikovanosť skôr zatienilo. V duchu týchto myšlienok aproximujme silové pôsobenie lana tak, akoby to bola ideálna pružina, teda čím viac ho naťahujeme tým väčšou silou pôsobí proti smeru výchylky

$$\vec{F}(\vec{r}) = -k(\vec{r} - \vec{r}_z),$$

kde $\vec{r}_z$ je polohový vektor počiatočného stavu, $\vec{F}(\vec{r}_z) = 0$ a k je tuhosť lana. Nutne treba poznamenať, že rôzne dlhé lano má rôznu tuhosť. Konkrétne (využijúc Hookov zákon) $k_l = k_L \dfrac{L}{l}$, kde L a k_L (l a k_l) je dĺžka a tuhosť celého lana (aktívnej časti lana). Preto rovnica pre vratnú silu vyvinutú aktívnou časťou lana nadobudne výsledný tvar:

$$\vec{F}(\vec{r}) = -k_L \frac{L}{l}(\vec{r} - \vec{r}_z). \tag{4}$$

Určiť energiu absorbovanú natiahnutím lana znamená dosadiť (4) do (1) a vypočítať jednoduchý integrál:

$$\int_{\vec{r}_z}^{\vec{r}} -\vec{F}(\vec{\xi}).d\vec{\xi} = k_L \frac{L}{l} \int_{\vec{r}_z}^{\vec{r}} (\vec{\xi} - \vec{\xi}_z).d\vec{\xi}.$$

Pri vhodnej voľbe súradnicovej sústavy a s uvážením $E(\vec{r}_0) = 0$ prejde integrál na jednoduchší jednorozmerný tvar:

$$E(\lambda) = k_L \frac{L}{l} \int_0^{\lambda} \alpha d\alpha = k_L \frac{L}{2l} \lambda^2. \tag{5}$$

Vo vzťahu (5) λ reprezentuje predĺženie (natiahnutie) lana.

Trenie

Energia pádu sa v značnej miere absorbuje aj trením o istiace prvky premenou na teplo. Sledujúc predošlé odstavce by sa na tomto mieste očakávalo explicitne vyjadriť jej závislosť od experimentálne merateľných konštánt. Nebola by to ťažká úloha, avšak značne neprehľadná. V každom z istiacich bodov totiž pôsobí na lano iná sila, závislá od geometrie osadenia istiacich bodov v skale, od stupňa opotrebenia materiálov karabín, typu lana a pod... Obmedzme sa teda na konštatovanie, že v istiacom reťazci sa trením absorbuje energia $\boldsymbol{E_t}$, ktorá je funkciou aktívnej dĺžky l lana a preklzu β.

Matematický model

Aplikujme teraz všetky predošlé poznatky na situáciu pri páde. Situácia je patrná z ***obr. 1***. Ak máme nalezenú výšku **h** nad posledným istiacim bodom, budeme padať na vzdialenosti **2h**, kým lano nezačne zaberať a potom ešte dĺžku $\dfrac{\lambda}{2}$, kým nezastavíme. K tejto dĺžke sa ešte pripočíta polovička preklzu β, čím celková dĺžka letu (od momentu, keď začneme padať, až po okamih, keď celkom zastavíme) bude $2h + \dfrac{\lambda}{2} + \dfrac{\beta}{2}$. Potenciálna energia, ktorá sa následne mení na kinetickú, bude podľa (3)

$$\Delta E_g = mg\left(2h + \frac{\lambda}{2} + \frac{\beta}{2}\right). \tag{6}$$

Túto energiu treba absorbovať, aby sa pád zastavil, preto platí rovnica:

$$E_{pádu} = E_{lana} + E_{trenia} \tag{7}$$

Dosadením z (3) a (5) do (7) vzniká pádová rovnica $mg\left(2h+\frac{\lambda}{2}+\frac{\beta}{2}\right)=E_t(l,\beta)+k_L\frac{L}{2l}\lambda^2$,

ktorá po niekoľkých algebrických úpravách nadobudne podobu:

$$k_L\frac{L}{2l}\lambda^2-\frac{mg}{2}\lambda+E_t(l,\beta)-mg\left(2h+\frac{\beta}{2}\right)=0 \qquad (8)$$

Rovnica (8) je z matematického hľadiska jednoduchý problém. Vzhľadom na λ ide o kvadratickú rovnicu, ktorej 2 korene dokážeme ľahko nájsť. Vylúčením nelogického záporného koreňa získavame pre natiahnutie lana λ formulku:

$$\lambda=\frac{l}{k_L L}\left(\frac{mg}{2}+\sqrt{\frac{m^2g^2}{4}+2k_L\frac{L}{l}\left[mg\left(2h+\frac{\beta}{2}\right)-E_t(l,\beta)\right]}\right) \qquad (9)$$

Výraz (9) je síce správny, ale pre numerické výpočty nanajvýš nepraktický. Preto sa pokúsme o jeho zjednodušenie. Rovnica (9) sa dá po niekoľkých algebrických úkonoch prepísať do tvaru:

$$\frac{\lambda}{l}=\frac{1}{2}\frac{mg}{k_L L}\left(1+\sqrt{1+8\frac{k_L L}{mg}\left[\frac{2h}{l}+\frac{\beta}{2l}-\frac{E_t(l,\beta)}{mgl}\right]}\right).$$

Na ľavej strane sa nachádza bezrozmerné číslo $\frac{\lambda}{l}$, s významom relatívneho predĺženia, pre ktoré budeme odteraz rezervovať symbol ω. Jednoduchou úvahou zistíme, že výraz $\frac{mg}{k_L L}$ má rovnaký význam – relatívne predĺženie na plnej dĺžke lana (viď ďalší text) a budeme preň rezervovať symbol ω_0. Napokon pre pomer $\frac{2h}{l}$ (pádový faktor) vyhradíme symbol $\boldsymbol{f}$. Posledná rovnica tak prejde na tvar:

$$\omega=\frac{1}{2}\omega_0\left(1+\sqrt{1+\frac{8}{\omega_0}\left[f+\frac{\beta}{2l}-\frac{E_t(l,\beta)}{mgl}\right]}\right). \qquad (10)$$

Vo výraze (10) figuruje niekoľko konštánt a premenných, ktoré dokážeme pre konkrétneho lezca a lano jednoducho určiť a niektoré, ktoré túto vlastnosť nemajú. Začnem tým, že $E_t(l,\beta)$ je nemožné experimentálne určiť. Napriek tomu, že zohráva dôležitú úlohu v brzdnom procese a nie je zanedbateľné, vylúčime ho z (10) považujúc za rovné nule. Predĺženie lana nám tak bude vychádzať väčšie ako v skutočnosti. Preklz β je individuálny pre každého ističa a väčšinou býva nulový (vyplýva z autorových pozorovaní). Preto ho taktiež zanedbáme ako limitne blízky nule. Výsledné relatívne predĺženie tak získa jednoduchý a použiteľný tvar:

$$\boxed{\omega=\frac{1}{2}\omega_0\left(1+\sqrt{1+8\frac{f}{\omega_0}}\right)}. \qquad (11)$$

Záverom tejto state poukážeme na možnosť určenia konštanty ω_0. Jej veľkosť je rôzna pre rôznych lezcov a laná. Stanoviť jej hodnotu pre konkrétny prípad možno tak, že na plnej dĺžke lana L (zvyčajne 50 metrov) staticky zavesíme lezca o hmotnosti m. Odmeriame o koľko sa lano predĺžilo (Λ) a určíme $\omega_0=\frac{\Lambda}{L}$. V priebehu času sa ω_0 mení, preto je vhodné ho opakovane merať napríklad po uplynutí 1 roku. Bežné hodnoty ω_0 sú rádovo $8\text{-}12.10^{-2}$.

Pretrhnutie lana

Nastáva čas, keď sa už môžeme zaoberať myšlienkou, kedy sa lano pretrhne. Je to vtedy, keď dosiahne určité kritické relatívne predĺženie ω_{max}. Vychádzajúc z tohto predpokladu môžeme za rozumnú mieru pravdepodobnosti pretrhnutia lana považovať pomer relatívneho predĺženia lana a kritického predĺženia. Vznikne tak bezrozmerné číslo *p(f)* z intervalu $\langle 0,1 \rangle$, nesúce všetky znaky pravdepodobnosti v štatistickom ponímaní:

$$p(f) = \frac{1}{2}\frac{\omega_0}{\omega_{max}}\left(1 + \sqrt{1 + 8\frac{f}{\omega_0}}\right). \tag{12}$$

Výsledok predchádzajúcich úvah, vzťah (12), v sebe síce zahŕňa množstvo užitočných informácií, ale keďže je tak trochu neprehľadný, nie je na prvý pohľad jasné čo z neho vyplýva.

Začnime tým, že si uvedomíme, že jediná vec, ktorú dokážeme ovplyvňovať je *pádový faktor f*. Ostáva zodpovedať otázku, či sa treba snažiť držať pádový faktor na nízkych alebo vysokých hodnotách. Odpoveď samozrejme znie – *pádový faktor má byť vždy čo najmenší*. Dôkaz poskytuje aparát diferenciálneho počtu. Naše tvrdenie dokážeme tak, že parciálna derivácia p podľa f bude kladná. Skutočne:

$$\frac{\partial p(f)}{\partial f} = \frac{2}{\omega_{max}\sqrt{1 + 8\frac{f}{\omega_0}}} > 0 \text{ pre } \forall f \ . \tag{13}$$

Tým sme ukázali, že s rastúcim pádovým faktorom naozaj narastá aj pravdepodobnosť pretrhnutia a je účelné držať ho na najnižších možných hodnotách.

Rázová sila a preťaženie

Pod pojmom rázová sila sa myslí brzdná sila lana v okamihu najväčšieho predĺženia a pre padajúceho lezca vyjadruje objektívnu mieru tvrdosti pádu. Zvláštny význam má pre padajúceho človeka aj pojem *preťaženie*. Je to bezrozmerné číslo, označované symbolom G, a vyjadruje, koľkonásobne je človek preťažený oproti stavu, keď sa nachádza v pokoji na povrchu Zeme. Značným preťaženiam sú vystavení napríklad astronauti pri štarte kozmickej lode, piloti stíhačiek pri opisovaní oblúkov vo vysokých rýchlostiach a v neposlednom rade aj lezci pri zachytení pádu lanom. Ľudské telo dokáže vydržať preťaženie okolo 15. Pri vysokých hodnotách *G* sa lámu kosti, dochádza k poraneniam vnútorných orgánov a ich úponov, pohmoždeniam mäkkých tkanív, krvácaniu, úrazom mozgu ... Ďalší text bude smerovať k tomu, aby ukázal že aj v rovnici preťaženia zohráva kľúčovú úlohu *pádový faktor.*

Newtonova pohybová rovnica pre harmonický oscilátor (situácia na **obr. 2)**, má tvar:

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = -\frac{k_L L}{ml} z \ . \tag{14}$$

Pri jej písaní sme lano opäť považovali za ideálnu pružinu. Význam symbolov v (14) je nasledovný: z – okamžitá výška, t – čas, k_L – tuhosť lana, L – dĺžka lana, l – aktívna dĺžka lana, m – hmotnosť lezca.

Z matematického uhla pohľadu je to obyčajná diferenciálna rovnica druhého rádu s konštantnými koeficientmi. Nájsť jej riešenie je štandardným problémom matematickej analýzy, preto ho uvádzam bez dôkazu:

$$z(t) = v_0 \sqrt{\frac{ml}{k_L L}} \sin \sqrt{\frac{k_L L}{ml}} t \,. \tag{15}$$

V procese riešenia (14) boli použité počiatočné podmienky $z(0) = 0$ a $\frac{\mathrm{dz}(0)}{dt} = v_0$, kde v_0 značí počiatočnú rýchlosť, ktorú má lezec práve v okamihu, keď prechádza rovnovážnou polohou.
Keďže zrýchlenie je definované ako druhá časová derivácia polohy, po dvoch jednoduchých časových deriváciách ho získame v tvare:

$$a(t) = -v_0 \sqrt{\frac{k_L L}{ml}} \sin \sqrt{\frac{k_L L}{ml}} t \,. \tag{16}$$

Maximálnu veľkosť bude mať vzťah (16) práve v čase τ, keď bude lano najviac napnuté. Vtedy $\left| \sin \sqrt{\frac{k_L L}{ml}} \tau \right| = 1$ a zrýchlenie bude mať veľkosť:

$$\left| a_{\max} \right| = v_0 \sqrt{\frac{k_L L}{ml}} \,. \tag{17}$$

Pre vyčíslenie už ostáva len určiť rýchlosť v_0. Predpokladáme pri tom, že došlo k premene potenciálnej energie na kinetickú $E_k = \frac{1}{2} m v^2$ a píšeme rovnicu energetickej bilancie:

$$mg\left(2h + \omega_0 l\right) = \frac{1}{2} m v_0^2 \,,$$

odkiaľ po jednoduchých úpravách získame vzťah pre počiatočnú rýchlosť:

$$v_0 = \sqrt{2\left(2h + \omega_0 l\right)} \,. \tag{18}$$

Konečne ak chceme sformulovať vzťah pre preťaženie, musíme zrýchlenie (17) predeliť tiažovým zrýchlením *g*. Kombináciou rovníc (17), (18) a prijatím definície preťaženia obdržíme po algebraických úpravách formulku:

$$\boxed{G = \sqrt{1 + 2\frac{f}{\omega_0}}} \,. \tag{19}$$

Pri pohľade na výraz (19) opäť vidíme úzke prepojenie s *pádovým faktorom*. S rastúcim f, podobne ako to bolo v prípade pravdepodobnosti pretrhnutia lana, rastie aj brzdné preťaženie. Dôkaz by bol obdobný ako v prípade (13).
Jednoduchým rozborom vidíme, že ak len odsadneme do lana (f=0), k žiadnemu preťaženiu nedôjde (G=1). Ak uvážime hraničnú situáciu s pádovým faktorom f=2, preťaženie bude cca. 7 (viď nasledujúce príklady).

Záver

Hlavnou myšlienkou a cieľom tohto článku bolo poukázať na význam pojmu *pádový faktor*. Zároveň bolo vysvetlené, že *pádový faktor* nie je len samoúčelne zadefinovaná veličina, ale čosi, čo úzko súvisí s pravdepodobnosťou pretrhnutia lana pri páde a s preťažením ľudského organizmu. Vyplynie sama z jednoduchých fyzikálnych úvah bez toho, aby ju bolo nutné do rovníc manuálne vsúvať.

Dodatok

Na záver ešte niekoľko poznámok.

-Z definície veličín *h* a *l* vieme, že $h \in \langle 0,l \rangle$ a $l \in \langle 0,L \rangle$. Odtiaľ vieme usúdiť, že $f \in \langle 0,2 \rangle$. Pádový faktor, ktorý presahuje *f=1, už* dá celkom slušne zabrať aj novému lanu a pre opotrebované lano to už znamená objektívne nebezpečie. Pri športovom lezení sa *f* pohybuje v rozmedzí 0,35 až 0,45 a pri týchto hodnotách vydržia bežné dynamické laná až okolo 220 pádov kým dôjde k pretrhnutiu. Štatistiky naviac hovoria, že väčšina lán je kvôli zdevastovanému opletu a vysokému veku z používania vyradená skôr, než by prestala byť bezpečná. Majme však na pamäti, že lezenie TR („top rope“), ako aj zlaňovanie sú pre lano obzvlášť namáhavé techniky a ich častým používaním dochádza k strate jeho dynamických vlastností rýchlejšie ako pri lezení štýlom RP.

-Ak si spotrebiteľ kúpi lano, ktoré má na visačke deklarovaných „***K*** UIAA normopádov“, znamená to, že má byť schopné zachytiť *K* pádov pri pádovom faktore *f=1,75* a závaží *80 kg*, za namáhania cez oblú hranu o polomere krivosti 5mm (testy sú robené na náhodne zvolenom 5m dlhom úseku lana a pády sú opakované po 5 minútach). Tento počet garantovaných pádov sa však nevzťahuje na pády cez ostrú hranu (v takom prípade je riziko pretrhnutia lana podstatne väčšie), pri vystavení lana chemikáliám, iným než bežným teplotám a ani na prípady, keď je porušený lanový oplet (hrozí, že nosné vlákna sa prerežú o ostrý povrch skaly).

-Poškodenému opletu treba venovať dostatočnú pozornosť- v neporušenom stave predstavuje údajne až okolo 30% nosného potenciálu lana. Rovnako tak uzol, ktorým sa naväzujeme na lano, výrazne oslabuje jeho pevnosť (je to vidno aj na tom, že laná majú tendenciu trhať sa práve v uzle). Preto sa silne doporučuje používať osvedčené uzly s dobrým trením, ktoré lano príliš nezalamujú (podľa UIAA je najvhodnejší tzv. osmičkový uzol).

-Vyššie uvedené hodnoty pádových faktorov sú bežné pre horolezeckú činnosť, t.j. pri lezení s dynamickým lanom a zakladaní postupových istení. Výnimkou sú „železné cesty“ via-ferraty, kde môžu pádové faktory nezriedka dosahovať hodnoty **6-10** a viac, ako to ukazuje **obr.3**. Jedná sa spravidla o cesty lezeckého charakteru v horskom teréne, prispôsobené pre turistov kramľami, rebríkmi, klinmi a osadené stabilným istením z oceľového lana. Pravdepodobnosť pretrhnutia spojovacích slučiek alebo zlomenia karabín je pri takýchto podmienkach vysoká, nehovoriac o preťažení, ktoré pôsobí na ľudské telo pri zachytení pádu. Brzdné preťaženie pri takýchto podmienkach dosahuje hodnôt na úrovni 15. Hrozí polámanie kostí, odtrhnutie vnútorných orgánov, otrasenie až bezvedomie. Preto povinnou súčasťou výstroja musí byť amortizér, ktorý na báze preklzu s veľkým trením absorbuje veľkú časť pádovej energie vo forme tepla a podstatne zníži rázovú silu.

Príklady

1.) Určte tuhosť vášho lana k_L

<u>Riešenie:</u> Určíme meraním koeficient ω_0. Lezec hmotnosti *m* odsadne staticky do lana dĺžky *l*, zmeriame predĺženie λ. Odtiaľ $\omega_0 = \frac{\lambda}{l}$. Zároveň vieme, že $\omega_0 = \frac{mg}{k_L L}$. Otočením posledného výrazu dostávame $k_L = \frac{mg}{\omega_0 L}$. Pre konkrétne vyčíslenie predpokladajme, že do lana sadá lezec

s hmotnosťou m=80 kg, aktívna dĺžka lana je 50m a predĺženie bude 3m. Odtiaľ $\omega_0 = \frac{3}{50} = 6.10^{-2}$ a $k_L = \frac{80.9,81}{6.10^{-2}.50} = 261,6\left[Nm^{-1}\right]$.

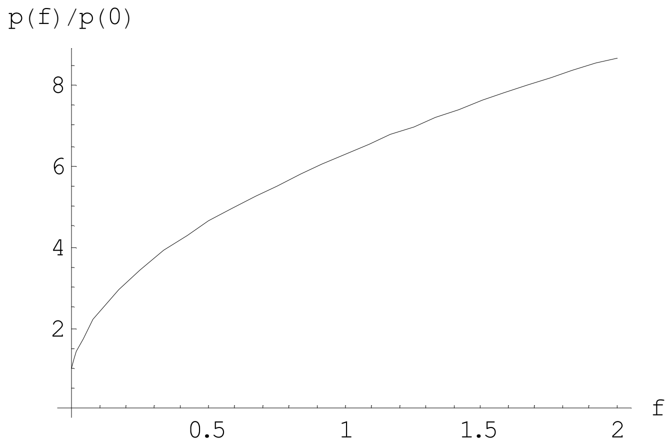
2.) Určite koľkokrát je väčšia pravdepodobnosť pretrhnutia toho istého lana tým istým lezcom ako v príklade 1.) pri pádových faktoroch f_1=0,5, f_2=1, f_3=1,5, f_4=2, f_5=6, f_6=10 ako pri pádovom faktore 0.

Riešenie:

Problémom pri určovaní pravdepodobnosti pretrhnutia lana je konštanta *kritického relatívneho predĺženia* ω_{max}, ktorá vystupuje vo vzťahu (12). Zmerať by sme ju dokázali len pomocou trhacích skúšok a informácia o nej nebýva štandardne uvedená na visačke lana (podľa autorových skúseností). Avšak vyčísliť pomery pravdepodobností nebude problémom, nakoľko zmienené konštanty sa navzájom vykrátia.

Pri pádovom faktore f=0 bude pravdepodobnosť pretrhnutia $p(0) = \frac{\omega_0}{\omega_{\max}}$.

Potom pomery $\frac{p(f)}{p(0)} = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1 + 8\frac{f}{\omega_0}}\right)$. Vyčíslením jednotlivých prípadov dostávame výsledky: $\frac{p(0.5)}{p(0)} = 4,6$; $\frac{p(1)}{p(0)} = 6,3$; $\frac{p(1,5)}{p(0)} = 7,6$; $\frac{p(2)}{p(0)} = 8,7$; $\frac{p(6)}{p(0)} = 14,7$; $\frac{p(10)}{p(0)} = 18,8$.



Obr. 4 Grafické znázornenie narastajúceho pomeru $\frac{p(f)}{p(0)}$ v závislosti od pádového faktoru.

3.) Vypočítaj preťaženia pri pádových faktoroch ako v príklade 2.)

Použijeme vzorec (19) a konštantu ω_0 z príkladu 1.)

$G(0) = 1$; $G(0,5) = 4,2$; $G(1) = 5,9$; $G(1,5) = 7,1$; $G(2) = 8,2$; $G(6) = 14,2$; $G(10) = 18,3$.

Vidíme, že pri páde na via-ferrate bez použitia amortizéru presahuje preťaženie hranicu 15, a vážne zranenia sú viac než pravdepodobné.